Numerik

Ingenieurinformatik Teil 2, Sommersemester 2026

David Straub

Gliederung

1. Einführung in Matlab
2. Arbeiten mit Arrays
3. Funktionen und Kontrollstrukturen
4. Analysis
5. Lineare Algebra
6. **Differentialgleichungen**
7. Einführung in Simulink

Fahrplan: Differentialgleichungen

Einheit 1 → Motivation, Begriffe, Euler-Verfahren

Einheit 2 → Standardform, Runge-Kutta, `ode45`

Einheit 3 – Heute → Matlab-Plots mit mehreren Subplots → Anwendungsbeispiele: verschiedene Ordnungen, nichtlinear, gekoppelt

Rückblick

Rückblick: Standardform

Jedes Anfangswertproblem in **Standardform**:

$$\boxed{\dot{y} = f(t,\, y), \qquad y(t_0) = y_0}$$

DGL n-ter Ordnung umschreiben (Beispiel: $\ddot{x} = \ldots$):

Schritt	Ergebnis
1. Nach höchster Ableitung auflösen	$\ddot{x} = g(t, x, \dot{x})$
2. Neue Variablen einführen	$y_1 := x, \quad y_2 := \dot{x}$
3. System aufschreiben	$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = g(t, y_1, y_2)$
4. Anfangswerte als Vektor	$y_0 = (x_0,\ \dot{x}_0)^\top$

Ordnung n → Zustandsvektor hat n Komponenten → n Anfangsbedingungen nötig.

Rückblick: `ode45`

```
[t, y] = ode45(f, tspan, y0)
```

Argument	Bedeutung	Beispiel
`f`	Rechte Seite: `@(t,y) [...]`	`@(t,y) [y(2); -y(1)]`
`tspan`	Zeitbereich `[t0, tend]`	`[0, 20]`
`y0`	Anfangszustand (Spaltenvektor)	`[1; 0]`
`t`	Zeitpunkte (Spaltenvektor)	
`y`	Lösungsmatrix: eine Zeile pro Zeitpunkt	

`y(:,1)` = erste Zustandsgröße, `y(:,2)` = zweite, usw.

Federschwinger: Standardform aufstellen

$$m\ddot{x} + kx = 0, \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0, \qquad m = 1,\ k = 4$$

Schritt	
1. Nach $\ddot{x}$ auflösen	$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\, x$
2. Neue Variablen	$y_1 := x, \quad y_2 := \dot{x}$
3. System 1. Ordnung	$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = -\frac{k}{m}\, y_1$
4. Anfangswerte	$y_0 = (1,\ 0)^\top$

Federschwinger: ode45-Aufruf

```
m = 1;  k = 4;

f = @(t, y) [y(2);  -(k/m)*y(1)];

[t, y] = ode45(f, [0, 10], [1; 0]);

% y(:,1) = x(t)   Auslenkung
% y(:,2) = v(t)   Geschwindigkeit
```

Einschub: Matlab-Plots

Zwei Subplots übereinander

width:20cm

Figure 1: width:20cm

Mehrere Subplots

Häufig sollen mehrere Größen untereinander dargestellt werden.

```
subplot(m, n, k)   % m Zeilen, n Spalten, k-ter Subplot
```

Aufruf	Wirkung
`subplot(2,1,1)`	oberer von zwei Subplots
`subplot(2,1,2)`	unterer von zwei Subplots
`subplot(1,2,1)`	linker von zwei Subplots
`subplot(2,2,3)`	unten links im 2×2-Raster

Jeder `plot`-Befehl nach `subplot(...)` zeichnet in den aktiven Subplot. `xlabel` kommt nur in den untersten Subplot, `ylabel` in jeden.

`subplot`: Vollständiges Beispiel

```
t = 0:0.01:20;
x = cos(t);
v = -sin(t);

subplot(2,1,1)
plot(t, x, 'b')
title('Federschwinger'),  ylabel('x [m]'),  grid on

subplot(2,1,2)
plot(t, v, 'r')
xlabel('t [s]'),  ylabel('v [m/s]'),  grid on
```

Jeder Subplot hat eigene Achsenbeschriftungen. `title` und `legend` können in jedem Subplot gesetzt werden.

? Aufgabe: Subplot

Die Lösung des Federschwingers liegt bereits vor (`t`, `y` aus dem vorherigen Code).

Stellen Sie $x(t)$ und $v(t)$ in **zwei Subplots übereinander** dar: - Oberer Subplot: `y(:,1)` mit `ylabel('x [m]')` - Unterer Subplot: `y(:,2)` mit `ylabel('v [m/s]')` und `xlabel('t [s]')` - Beide mit `grid on`

Fallschirm

Fallschirm: Kräftebilanz

Ein Fallschirmspringer (Masse m) fällt vertikal. Kräftebilanz:

$$m\,\dot{v} = mg - c_w\,v^2$$

Größe	Bedeutung	Wert
m	Masse	80 kg
g	Erdbeschleunigung	9,81 m/s^2
c_w	Luftwiderstandskoeffizient	0,5 kg/m

DGL 1. Ordnung – Schritte 1–3 entfallen, sie ist bereits in Standardform:

$$\dot{v} = \underbrace{g - \frac{c_w}{m}\,v^2}_{f(t,v)}, \qquad \text{Schritt 4: } v_0 = 0$$

Fallschirm: Grenzgeschwindigkeit

Im Gleichgewicht gilt $\dot{v} = 0$:

$$0 = mg - c_w\,{v^*}^2 \quad \Rightarrow \quad v^* = \sqrt{\frac{mg}{c_w}}$$

Mit den Zahlenwerten:

$$v^* = \sqrt{\frac{80 \cdot 9{,}81}{0{,}5}} \approx 39{,}6\,\mathrm{m/s} \approx 143\,\mathrm{km/h}$$

Diese Grenzgeschwindigkeit lässt sich analytisch berechnen – die vollständige Lösung $v(t)$ ist ebenfalls analytisch möglich, aber aufwändig.

Fallschirm: ode45-Aufruf

```
m = 80;  g = 9.81;  cw = 0.5;

f = @(t, v) g - (cw/m)*v.^2;

[t, v] = ode45(f, [0, 30], 0);

v_star = sqrt(m*g/cw);
% v = v(t)   (skalares System, eine Spalte)
```

Aufgabe: Fallschirm

Stellen Sie $v(t)$ in einem Plot dar und zeichnen Sie v^* als gestrichelte Linie ein.

Variation: Der Fallschirm öffnet bei $t = 10\,\mathrm{s}$: c_w springt auf $20\,\mathrm{kg/m}$. Passen Sie `f` an und beobachten Sie die neue Grenzgeschwindigkeit.

Nichtlineares Pendel

Pendel: Standardform aufstellen

Mathematisches Pendel ($l = 1\,\mathrm{m}$), ohne Dämpfung:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi, \qquad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0$$

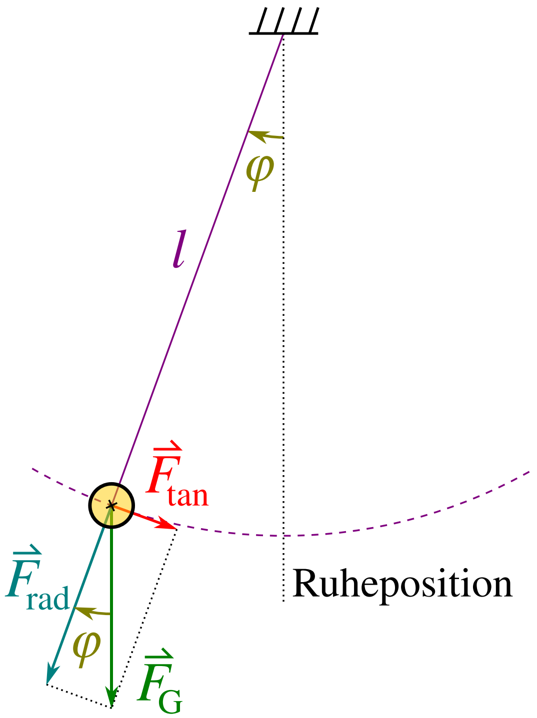
Stellen Sie das System in Standardform $\dot{y} = f(t, y)$ auf (Schritte 2–4).

Wie ändert sich f, wenn man $\sin\varphi \approx \varphi$ linearisiert?

Pendel: Lösung – Standardform

Schritt	
1. Nach $\ddot{\varphi}$ auflösen	bereits gelöst: $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$
2. Neue Variablen	$y_1 := \varphi, \quad y_2 := \dot{\varphi}$
3. System 1. Ordnung	$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = -\frac{g}{l}\sin(y_1)$
4. Anfangswerte	$y_0 = (\varphi_0,\ 0)^\top$

Linearisiert ($\sin\varphi \approx \varphi$): Schritt 3 wird $\dot{y}_2 = -\frac{g}{l}\,y_1$



Pendel: ode45-Aufruf

```
g = 9.81;  l = 1;  phi0 = 2.5;

f_nl  = @(t, y) [y(2); -(g/l)*sin(y(1))];   % nichtlinear
f_lin = @(t, y) [y(2); -(g/l)*y(1)];         % linearisiert

[t1, y1] = ode45(f_nl,  [0, 10], [phi0; 0]);
[t2, y2] = ode45(f_lin, [0, 10], [phi0; 0]);
% y1(:,1) = phi(t) nichtlinear
% y2(:,1) = phi(t) linearisiert
```

Aufgabe: Pendel

Stellen Sie beide Lösungen $\varphi(t)$ in einem Plot dar (`legend` nicht vergessen).

Variation: Testen Sie $\varphi_0 = 0{,}3$ / $1{,}0$ / $2{,}5\,\text{rad}$. Ab welcher Auslenkung weicht die linearisierte Lösung spürbar ab?

Fußball

Fußball: Kräftebilanz

Ein Freistoß mit Luftwiderstand $F_D = c_w v^2$ – aufgeteilt nach Richtungen:

$$m\ddot{x} = -c_w\, v\, \dot{x}, \qquad m\ddot{y} = -mg - c_w\, v\, \dot{y}, \qquad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

Ohne Luftwiderstand ($c_w = 0$): x und y **entkoppelt**, analytisch lösbar. Mit Luftwiderstand: v koppelt beide Richtungen – **numerische Lösung nötig**.

$m = 0{,}43\,\mathrm{kg}, \quad c_w = 0{,}01\,\mathrm{kg/m}, \quad v_0 = 25\,\mathrm{m/s}, \quad \alpha = 30°$

Stellen Sie die Standardform auf. Wie viele Zustände hat z?

Fußball: Lösung – Standardform

Zwei DGLn 2. Ordnung → vier Zustände, wobei $v = \sqrt{z_2^2 + z_4^2}$:

Schritt	
1. Auflösen	$\ddot{x} = -\frac{c_w}{m} v\dot{x}$, $\ddot{y} = -g - \frac{c_w}{m} v\dot{y}$
2. Variablen	$z_1 = x,\ z_2 = \dot{x},\ z_3 = y,\ z_4 = \dot{y}$
3. System	$\dot{z}_1 = z_2,\ \dot{z}_2 = -\frac{c_w}{m} v\, z_2,\ \dot{z}_3 = z_4,\ \dot{z}_4 = -g - \frac{c_w}{m} v\, z_4$
4. Anfangswerte	$z_0 = (0,\ v_0 \cos\alpha,\ 0,\ v_0 \sin\alpha)^\top$

Fußball: ode45-Aufruf

```
m = 0.43;   g = 9.81;   cw = 0.01;
v0 = 25;    alpha = 30*pi/180;

f = @(t, z) [z(2);
```

```
            -cw/m * sqrt(z(2)^2+z(4)^2) * z(2);
            z(4);
            -g - cw/m * sqrt(z(2)^2+z(4)^2) * z(4)];

zinit = [0; v0*cos(alpha); 0; v0*sin(alpha)];
[~, z]  = ode45(f,                       [0, 2.5], zinit);
[~, z0] = ode45(@(t,z)[z(2);0;z(4);-g], [0, 2.5], zinit);
% z(:,1) = x,  z(:,3) = y
```

? Aufgabe: Fußball

Stellen Sie beide Bahnkurven (y über x) in einem Plot dar.

Variation: Testen Sie $\alpha = 15°$, $30°$, $45°$, $60°$. Bei welchem Winkel fliegt der Ball am weitesten – und warum liegt das Optimum nicht bei $45°$?

Thermische Kette

Thermische Kette: Energiebilanz

Drei Körper in Reihe – Erweiterung des Batterie-Modells aus Einheit 1:

$$C\,\dot{T}_1 = P - \lambda_{12}(T_1 - T_2)$$

$$C\,\dot{T}_2 = \lambda_{12}(T_1 - T_2) - \lambda_{23}(T_2 - T_3)$$

$$C\,\dot{T}_3 = \lambda_{23}(T_2 - T_3) - \lambda_3(T_3 - T_\infty)$$

Alle drei Gleichungen sind bereits 1. Ordnung → Schritte 1–3 entfallen.

$C = 100\,\mathrm{J/K},\ \lambda_{12} = \lambda_{23} = 5\,\mathrm{W/K},\ \lambda_3 = 2\,\mathrm{W/K},\ P = 50\,\mathrm{W},\ T_\infty = 20\,^\circ\mathrm{C},\ T_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$

Wie lautet der Zustandsvektor y? Wie lauten die Anfangsbedingungen?

Thermische Kette: Lösung – Standardform

Alle Gleichungen sind 1. Ordnung → Schritte 1–3 entfallen:

Schritt	
2. Variablen	$y_1 = T_1, \quad y_2 = T_2, \quad y_3 = T_3$
4. Anfangswerte	$y_0 = (20,\ 20,\ 20)^\top$ °C

Thermische Kette: ode45-Aufruf

```
C=100; L12=5; L23=5; L3=2; P=50; Tinf=20;

f = @(t, T) [
    (P   - L12*(T(1)-T(2))) / C;
    (L12*(T(1)-T(2)) - L23*(T(2)-T(3))) / C;
    (L23*(T(2)-T(3)) - L3*(T(3)-Tinf))  / C
];

[t, T] = ode45(f, [0, 500], [20; 20; 20]);
```

```
% T(:,1) = T1(t),  T(:,2) = T2(t),  T(:,3) = T3(t)
```

? Aufgabe: Thermische Kette

Stellen Sie $T_1(t)$, $T_2(t)$, $T_3(t)$ in einem Plot dar.

Beobachtung: In welcher Reihenfolge erwärmen sich die Körper? Welche Gleichgewichtstemperaturen stellen sich ein?

Variation: Ersetzen Sie P durch $300\,\mathrm{W}$ für $t \leq 50\,\mathrm{s}$, danach 0. Was beobachten Sie?

Biegelinie

Biegelinie: Ort als unabhängige Variable

Euler-Bernoulli-Kragarm: Streckenlast q, eingespannt bei $x = 0$, frei bei $x = L$.

$$EI\, y''(x) = -\frac{q}{2}(L - x)^2$$

Die **unabhängige Variable** ist der Ort x – nicht die Zeit. `ode45` funktioniert identisch, die Variable heißt nur `x` statt `t`.

Stellen Sie die Standardform auf. Welche Anfangsbedingungen gelten bei $x = 0$?

Biegelinie: Lösung – Standardform

Schritt	
1. Nach y'' auflösen	$y'' = -\frac{q}{2EI}(L - x)^2$
2. Neue Variablen	$z_1 := y, \quad z_2 := y'$
3. System	$z_1' = z_2, \quad z_2' = -\frac{q}{2EI}(L - x)^2$
4. Anfangswerte	$z_0 = (0,\ 0)^\top$ (Einspannung: keine Verschiebung, kein Winkel)

Biegelinie: ode45-Aufruf

```
E = 210e9;   I = 1e-6;   L = 2;   q = 1000;
EI = E * I;

f = @(x, z) [z(2);  -q*(L-x)^2 / (2*EI)];

[x, z] = ode45(f, [0, L], [0; 0]);

plot(x, -z(:,1)*1e3)
```

```
xlabel('x [m]'), ylabel('Durchbiegung [mm]'), grid on

y_analytisch = q*L^4 / (8*EI) * 1e3;
fprintf('Analytisch:  %.3f mm\n', y_analytisch)
fprintf('Numerisch:   %.3f mm\n', -z(end,1)*1e3)
```

Analytische Kontrolle: $y(L) = \dfrac{qL^4}{8EI}$

? Aufgabe: Biegelinie

Führen Sie den Code aus und vergleichen Sie den numerischen Endwert mit der analytischen Formel.

Variation: Verdoppeln Sie die Balkenlänge auf $L = 4\,\mathrm{m}$. Um welchen Faktor ändert sich die maximale Durchbiegung?

Zusammenfassung

Zusammenfassung

Beispiel	Ordnung	Zustand	Besonderheit
Fallschirm	1	v	nichtlinear (v^2)
Pendel	2	$(\varphi, \dot{\varphi})$	nichtlinear ($\sin\varphi$)
Fußball	4	(x, v_x, y, v_y)	gekoppelt, nichtlinear
Thermische Kette	3	(T_1, T_2, T_3)	gekoppelt, linear
Biegelinie	2	(y, y')	Variable x statt t

Immer dasselbe Schema: 1. Standardform: $\dot{y} = f(t, y)$, Anfangswert y_0 2. Function-Handle `f` schreiben 3. `[t, y] = ode45(f, tspan, y0)` aufrufen 4. `y(:,k)` extrahieren und plotten